МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 3-го курса заочной формы обучения
по направлению
15.03.04 – Автоматизиция технологических процессов и производств

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2021

Составитель: ст. преподаватель Артамонова Е.А.

Приведены варианты заданий контрольных работ для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математические основы теории систем». Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно – методическое пособие содержит индивидуальные задачи для контрольных работ, выполняемых студентами заочной формы обучения. Тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Математические основы теории систем».

Задания по каждой теме имеют 10 вариантов, правило выбора варианта приведено перед заданиями контрольных работ. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа в базовой подготовке бакалавров направления 15.03.04. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к зачёту и рекомендуемая литература.

Контрольная работа

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА: НОМЕР ВАРИАНТА СТУДЕНТ ВЫБИРАЕТ ПО ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЕ ЗАЧЕТНОЙ КНИЖКИ.

Задача №1 (Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме).

<u>Варианты 1, 2</u>

В магазин поступило n телевизоров. Из них k имеют скрытые дефекты. Покупателю для выбора наудачу предложено l телевизоров. Какова вероятность того, что все предложенные покупателю изделия не содержат дефектов?

1. $n=30$, $k=3$, $l=2$.
2. $n=20$, $k=2$, $l=3$.

<u>Варианты 3,4</u>

Из партии, содержащей n изделий, среди которых k бракованных, наудачу извлекают m изделий для контроля. Найти вероятности следующих событий: A={в полученной выборке ровно l бракованных изделий}, B={в полученной выборке нет бракованных изделий}.

3. $n=10$, $k=3$, $l=1$, $m=4$.
4. $n=12$, $k=3$, $l=2$, $m=5$

<u>Варианты 5,6</u>

Имеются два ящика с деталями. В первом n деталей, из них m годных. Во втором ящике N изделий, из них M годных. Сборщик наудачу выбрал по одной детали из каждого ящика. Найти вероятность того, что обе выбранные детали годные. Какова вероятность того, что обе выбранные детали бракованные?

5. $n=12$, $m=8$, $N=8$, $M=7$.
6. $n=14$, $m=10$, $N=6$, $M=4$.

<u>Варианты 7,8</u>

Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если:

7. число мест равно *8*.
8. число мест равно *12*.

Варианты 9,10

Из урны, содержащей $m+n$ шаров, из которых m белых и n черных, на удачу отбирают k шаров и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: A={все отложенные шары белые}, B={среди отложенных шаров ровно l белых}.

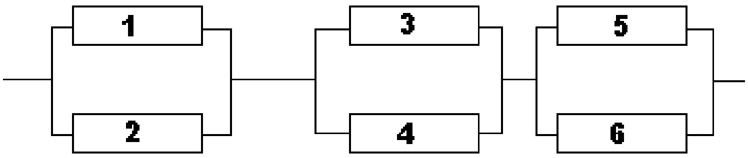
9. $m=10,$ $n=6,$ $k=5,$ $l=3.$

10. $m=8,$ $n=12,$ $k=6,$ $l=4.$

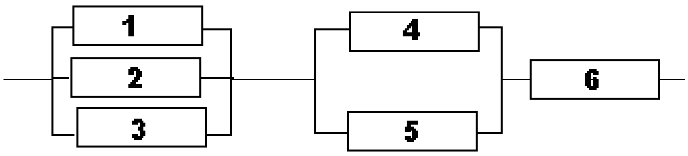
Задача № 2 (Вероятности сложных событий и применение теорем сложения и умножения)

Электрическая цепь прибора составлена по схеме, приведенной на рисунке Вашего варианта. Событие A_k={k-ый элемент вышел из строя}. k=1,2,…,6. Отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Известна надежность $p_k = P(\overline{A}_k)$ k-го элемента (соответственно $q_k = 1 - p_k$ - вероятность отказа). Событие B={разрыв цепи}. Выразить событие B в алгебре событий A_k. Найти вероятность отказа прибора и вероятность надежности схемы. $p_1=p_2=0.9,$ $p_3=p_4=0.8,$ $p_5=p_6=0.85.$

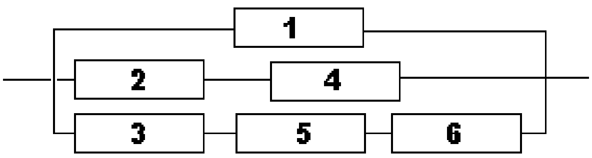
Вариант 1



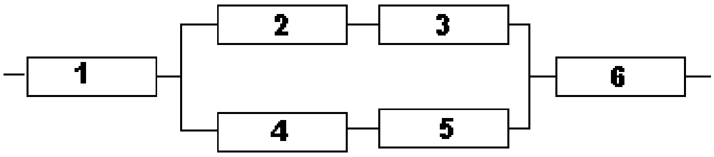
Вариант 2



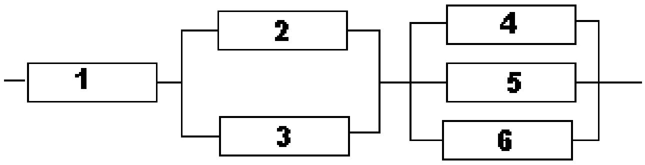
Вариант 3



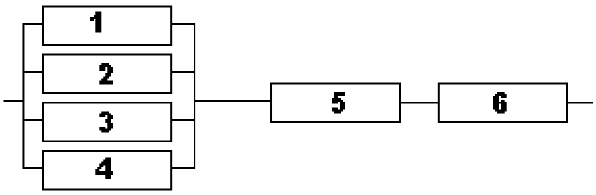
Вариант 4



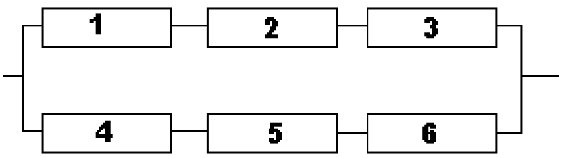
Вариант 5



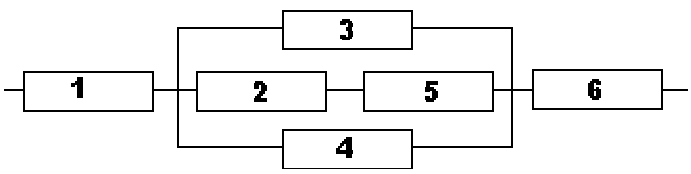
Вариант 6



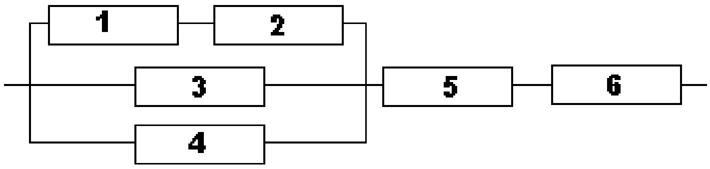
Вариант 7



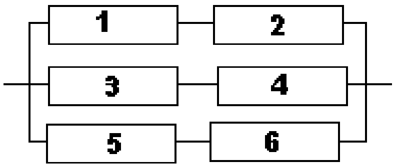
Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10



Задача № 3 (Схема испытаний Бернулли и предельные теоремы в схеме Бернулли)

Варианты №1,2,3

Вероятность выигрыша в лотерею по одному билету равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

1. $p=0.3,\quad n=15.$
2. $p=0.4,\quad n=12.$
3. $p=0.2,\quad n=8.$

Варианты № 4,5

В семье n детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки по 0.5, определить вероятность того, что в данной семье мальчиков не менее k, но не более m.

4. $n=6,\quad k=3,\quad m=5.$
5. $n=7,\quad k=2,\quad m=4.$

Варианты № 6,7,8

Вероятность выпуска бракованного сверла равна 0.02. Свёрла укладывают в коробки по n штук. Какова вероятность того, что в коробке m бракованных свёрл?

6. $n=100, \quad m=2.$
7. $n=200, \quad m=4.$
8. $n=150, \quad m=1.$

<u>Варианты №9,10</u>

Вероятность того, что поставляемая на сборочный конвейер деталь попадает в сборку, равна *p*. Какова вероятность того, что из *n* деталей на сборку не попало деталей от *k1* до *k2?*

9. $p=0.8, \quad n=150, \quad k1=15, \quad k2=35.$
10. $p=0.7, \quad n=200, \quad k1=50, \quad k2=60.$

Задача №4 (Дискретные случайные величины)

Составить закон распределения случайной величины *X*. Записать функцию распределения, построить её график. Вычислить числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$).

<u>Варианты №1,2,3,4</u>

X-число отказавших элементов в одном опыте с устройством, состоящим из *n* независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента *p*.

1. $n=3, \quad p=0.1.$
2. $n=4, \quad p=0.15.$
3. $n=3, \quad p=0.15.$
4. $n=4, \quad p=0.2.$

<u>Варианты №5,6,7</u>

В партии *k%* бракованных изделий. Наудачу отобрано *n* изделий. *X*- число бракованных изделий среди отобранных. Дискретная случайная величина *X* распределена по биномиальному закону:

5. $k=15\%, \quad n=4.$
6. $k=10\%, \quad n=5.$
7. $k=20\%, \quad n=3.$

<u>Варианты №8,9,10</u>

В партии из *n* деталей имеется *m* стандартных. Наудачу отобрали *k* деталей. *X*-число стандартных деталей среди отобранных.

8. $n=10, \quad m=8, \quad k=3.$
9. $n=9, \quad m=7, \quad k=3.$
10. $n=12, \quad m=10, \quad k=3.$

Задача№5 (Непрерывные случайные величины: равномерное, нормальное и показательное распределения)

Варианты №1,2, 3

Цена деления шкалы амперметра равна α Ампер. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая ε.

1. $\alpha =0.1,$ $\varepsilon =0.04.$
2. $\alpha =0.2,$ $\varepsilon =0.05.$
3. $\alpha =0.1,$ $\varepsilon =0.02.$

Варианты №4,5,6,7

Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально. Проектная длина детали равна l мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее α мм и не более β мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше а мм.

4. $l=50,$ $\alpha =32,$ $\beta =68,$ a$=40.$
5. $l=100$ $\alpha =80,$ $\beta =120,$ a$=90.$
6. $l=80$ $\alpha =70,$ $\beta =90,$ a$=75.$
7. $l=200$ $\alpha =160,$ $\beta =240,$ a$=190.$

Варианты №8,9,10

Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, определяемое плотностью $f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x\geq 0,$ $f(x)=0$ при $x<0.$ Найти вероятность того, что за время t часов элемент не откажет.

8. $\lambda=0.01,$ $t=50.$
9. $\lambda =0.02,$ $t=100.$
10. $\lambda =0.03,$ $t=100.$

Задача № 6 (Выборка, выборочные характеристики)

Из изучаемой налоговыми органами обширной группы населения случайным образом отобраны 10 человек и собраны сведения об их доходах за истекший год в тысячах рублей: $x1, x2,\ldots, x10$. Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию. Считая распределение доходов в группе нормальным и принимая в качестве его параметров выборочные характеристики, определить, какой процент населения имеет годовой доход, превышающий 70 тыс. рублей.

№ вар	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*	*x6*	*x7*	*x8*	*x9*	*x10*
1	50	40	60	80	40	50	60	120	70	50
2	45	65	85	45	55	65	95	75	65	55
3	80	70	60	50	70	90	50	60	70	100
4	65	55	45	65	85	55	45	65	100	80
5	50	60	70	100	80	70	60	50	70	90
6	100	40	80	90	50	60	80	70	70	50
7	100	50	80	90	100	130	55	60	100	80
8	70	40	45	90	110	60	50	40	110	90
9	80	110	90	80	70	60	60	50	65	50
10	90	40	60	40	80	65	90	70	50	60

Краткие теоретические сведения

1. <u>Элементы комбинаторики</u> *<u>Размещениями</u>* m из n элементов называются m -элементные подмножества множества E=$\{a1,a2,\dots,an\}$, различающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Общее число таких различных комбинаций обозначается символом A_n^m.

<u>Перестановками</u> называются размещения из n по n элементов. Общее число перестановок обозначают символом P_n.

<u>Сочетаниями</u> из n по m элементов называются m- элементные подмножества множества E=$\{a1,a2,\dots,an\}$, имеющие различный состав элементов. Два сочетания считаются различными, если хотя бы один элемент входит в одну комбинацию, но не входит в другую. Общее число различных сочетаний обозначают символом C_n^m.

Число размещений, перестановок и сочетаний определяются формулами:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad P_n = n!, \qquad C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

2. <u>Классическое определение вероятности</u>

$P(A)=\dfrac{m}{n}$, где n – общее число элементарных событий (исходов, которые в данном опыте образуют конечную полную группу равновозможных попарно несовместных событий), m – число элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A.

3. <u>Геометрическое определение вероятности</u>

$P(A)=\dfrac{мера(A)}{мера(\Omega)}$. Вероятность попадания точки в какую либо часть A области Ω пропорциональна мере (длине, площади, объему и т.д.) этой части и не зависит от ее расположения и формы.

4. <u>Основные свойства вероятности</u>

Вероятность любого события A - число, заключенное между 0 и 1. Вероятность невозможного события равна 0. Вероятность достоверного события равна 1.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Для любых двух событий A и B имеет место формула (теорема сложения для произвольных событий):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Для полной группы несовместных событий $A_1, \quad A_2, \quad ..., \quad A_n$

$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \quad \text{- теорема умножения.}$$

Если события A и B – независимые, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \quad \text{- теорема умножения.}$$

5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Если известно, что событие A может произойти с одним из событий $H_1, \quad H_2, \quad ..., \quad H_n$ (гипотез), образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

Вероятности гипотез после того как имело место событие A переоценивают по формулам Байеса:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}, \quad i=1,2,...,n.$$

6. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p (вероятность «успеха»), то вероятность того, что в этих n испытаниях событие A наступит ровно k раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Число $k0$ называется наивероятнейшим числом наступления события A в n испытаниях по схеме Бернулли, если значение $P_n(k)$ при $k=k_0$ не меньше остальных значений. Число k_0 можно найти из двойного неравенства:

$$np+p-1\le k_0\le np+p \, .$$

7. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Теорема 1 (Локальная теорема Лапласа). При больших n

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Теорема 2 (Интегральная теорема Лапласа). При больших n вероятность того , что в серии испытаний событие A появится от k_1 до k_2 раз, выражается приближенной формулой:

$$P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right), \qquad \textit{где} \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p\,,$$

$$\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$$ - функция Лапласа.

Теорема 3 (Закон «редких» явлений Пуассона). При n ? 1 и малых *p*, если среднее число успехов $\lambda = np, \quad \lambda - const$, имеет место приближенная формула

$$P_n\left(k\right) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ «ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ»

Пример 1. В ящике находится 10 деталей. Из них 3 дефектные. Наудачу отобраны 3 детали. Какова вероятность того, что:

а) все детали дефектные *(событие А)*;

б) только одна деталь дефектная *(событие В)*;

в) все три детали годные *(событие С);*

г) хотя бы одна деталь дефектная *(событие D).*

Решение. Используем классическое определение вероятности.

а) *Событие А* = {выбранные три детали дефектные};

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

Элементарное событие в данной задаче - комбинация (сочетание) из трех деталей. $N=C_{10}^{3}$ - общее число способов выбрать 3 детали из имеющихся 10 деталей. $M=1$ (имеется всего один вариант выбора 3 дефектных деталей)

$$P(A)=\frac{1}{C_{10}^{3}}=\frac{1}{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}}=\frac{7!\cdot 3!}{10!}=\frac{1}{120}.$$

б) *Событие В* = {из трех выбранных деталей 1 деталь дефектная, две детали без дефекта};

$$P(B)=\frac{M}{N},$$

где $M=C_3^1\cdot C_7^2$ - количество вариантов, благоприятствующих появлению события В, при которых 1 дефектная деталь выбирается из группы 3 дефектных и 2 бездефектные детали выбираются из группы 7 бездефектных деталей

$N=C_{10}^{3}$

Следовательно, $P(B)=\frac{C_3^1\cdot C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{7!}{5!\cdot 2!}}{\frac{10!}{7!\cdot 3!}}=\frac{7}{45}.$

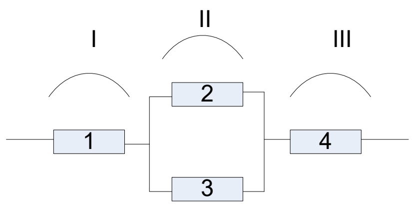
в) *Событие С* = {выбранные три детали бездефектные}

$$P(C)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!}}{\frac{10!}{7!\cdot 3!}}=\frac{7}{24}.$$

г) *Событие* D = {хотя бы одна из трех выбранных деталей бездефектная}. Рассмотрим противоположное событие $\bar{D}$.

$\bar{D} = C$ = { среди трех выбранных деталей нет дефектных}. Так как $P(D) = 1 - P(\bar{D})$, то $P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

Пример 2. Электрическая цепь прибора составлена по схеме, приведенной на рисунке. Отказы элементов являются независимыми и совоку4пными событиями. Известна надежность p_k k- го элемента $p_1=p_2=0.7$; $p_3=0.8$; $p_4=0.9$. Найти вероятность надежности схемы P(A).



Решение. Разобьем схему на блоки, состоящие из последовательных соединений. Блок I состоит из элемента 1 .

Блок II состоит из параллельного соединения элементов 2 и 3.

Блок III – из элемента 4.

Вероятность того, что схема работает, равна $P(A)=P_I \cdot P_{II} \cdot P_{III}$.

P_I – вероятность того, что I блок исправен.

P_{II} - вероятность того, что II блок исправен.

P_{III} - вероятность того, что III блок исправен.

$P_I=p_1$

Вероятность того, что II блок исправен: $P_{II} = 1 - q_2 q_3$

Вероятность того, что III блок исправен: $P_{III} = p_4$

Искомая вероятность что цепь сработает:

$$P(A) = p_1(1 - q_2 q_3) p_4 = 0,7 \cdot (1 - 0,3 \cdot 0,2) \cdot 0,9 = 0,5922$$

Пример 3. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекается ещё 2 мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

Решение. Рассмотрим предположения (гипотезы):

H_1={на первую игру выбирают два новых мяча}.

H_2={на первую игру выбирают один новый мяч, и один игранный}.

H_3={на первую игру выбирают два игранных мяча}.

Вероятности гипотез соответственно равны:

$$P(H_1)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{\frac{15!}{13!\cdot 2!}}{\frac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{21}{38},\ P(H_2)=\frac{C_{15}^1\cdot C_5^1}{C_{20}^2}=\frac{15}{38},\ P(H_3)=\frac{C_5^1}{C_{20}^2}=\frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{\frac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{2}{38}.$$

Проверка: $\sum p(H_i)=1$ - выполняется: $\frac{21}{38}+\frac{15}{38}+\frac{2}{38}=1.$

Пусть, событие А = {вторая игра проводится двумя новыми мячами}. Тогда условные вероятности следующие:

$$P(A|H_1)=\frac{C_{13}^2}{C_{20}^2}=\frac{\frac{13!}{11!\cdot 2!}}{\frac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{39}{95},\ P(A|H_2)=\frac{C_{14}^2}{C_{20}^2}=\frac{\frac{14!}{12!\cdot 2!}}{\frac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{91}{190},$$

$$P(A|H_3)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{21}{38}.$$

Вероятность события А найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{21}{38}\cdot\frac{39}{95}+\frac{15}{38}\cdot\frac{91}{190}+\frac{1}{19}\cdot\frac{21}{38}=0{,}4450138.$$

Пример 4. а) На грядке высажено 8 луковиц определенного сорта тюльпанов. Всхожесть луковиц 80%. Какова вероятность, что взойдет не менее 5, но не более 7 растений.

Решение. Событие А = {взойдет отдельный тюльпан}.

Событие В = {взойдет от 5 до 7 растений}.

Пусть событие B_5={взойдет ровно 5 тюльпанов}, событие B_6= {взойдет ровно 6 тюльпанов}, событие B_7 ={взойдет ровно 7 тюльпанов}.

Вероятность события B_k, состоящего в том, что событие А произойдет ровно k раз при n независимых испытаниях, рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P(B_k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

В частности,

$$P(B_5) = P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}147,$$

$$P(B_6) = P_8(6) = C_8^6 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}294,$$

$$P(B_7) = P_8(7) = C_8^7 \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 0{,}335.$$

В данном случае имеем $B = B_5 + B_6 + B_7$. По теореме сложения для несовместных событий получаем

$$P(B) = P(B_5) + P(B_6) + P(B_7) = 0{,}147 + 0{,}294 + 0{,}335 = 0{,}776.$$

в) Посажено 100 луковиц. Вероятность всхода 80%. Какова вероятность, что взойдут не менее 75, но не более 90.

Решение. Испытания проводятся по схеме Бернулли. Если число испытаний *n* велико, то используют интегральную теорему Лапласа:

$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, значение которой берем из таблицы.

$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, (i = 1{,}2).$

По условию *n=100, p=0,8, q=0,2,* $k_1=75$, $k_2=90$. Следовательно,

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

Имеем:

$P_{100}(75 \le k \le 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}8882$. (Здесь учтено, что функция Лапласа нечетная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

Пример 5. Составить закон распределения случайной величины X - оценки, полученной на экзамене наугад выбранным студентом. Известно, что в группе из 20 человек 2 студента получили оценку – «2», 6 студентов – «3», 10 студентов – «4» и 2 студента – «5». Построить график функции распределения. Вычислить числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение: ДСВ X -отметка студента, которая может принять значения 2; 3; 4 или 5. Вероятность события $\{X=2\}$ равна $P(X=2)=p_1=2/20$, (число двоек - 2, а общее число студентов 20). Вероятности других возможных значений равны:

$$P(X=3)=p_2=\frac{6}{20}, P(X=4)=p_3=\frac{10}{20}, P(X=5)=p_4=\frac{2}{20}.$$

Следовательно, закон распределения ДСВ имеет вид:

X	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Контроль: 0,1+0,3+0,5+0,1=1

Найдем числовые характеристики данной случайной величины. Математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}1 = 0{,}2+0{,}9+2+0{,}5=3{,}6.$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i. = (2-3{,}6)^2\cdot 0{,}1+(3-3{,}6)^2\cdot 0{,}3+$$
$$+(4-3{,}6)^2\cdot 0{,}5+(5-3{,}6)^2\cdot 0{,}1=$$
$$=2{,}56\cdot 0{,}1+0{,}36\cdot 0{,}3+0{,}16\cdot 0{,}5+1{,}96\cdot 0{,}1=0{,}64$$

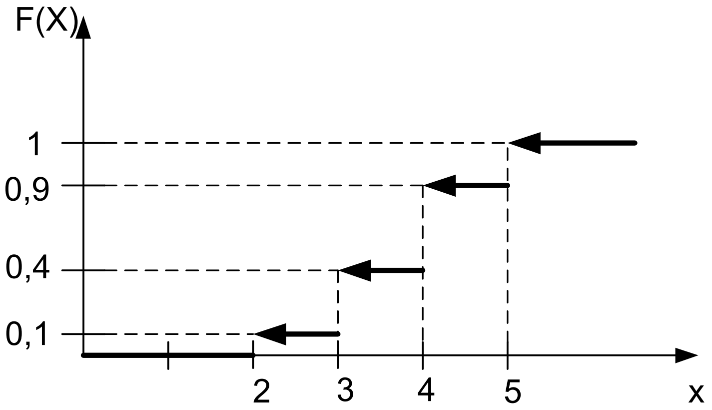
Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8.$$

Функция распределения $F(X)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{если } x\le 2\\ 0,1, \text{если } 2<x\le 3\\ 0,1+0,3, \text{если } 3<x\le 4\\ 0,1+0,3+0,5, \text{если } 4<x\le 5\\ 1, \text{если } x>5\end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:



Пример 6. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, определяемое плотностью $f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}$ при $x\ge 0$, $f(x)=0$ при $x<0$. Найти вероятность того, что за время *t=25* часов элемент не откажет, если известно что $\lambda=0{,}04$.

Решение. X - непрерывная случайная величина-время безотказной работы устройства, которое работает с момента *x=0*, а в момент *x* происходит отказ. Длительность времени безотказной работы имеет показательное распределение с функцией распределения $F(x)=P(X<x)=\int_0^x \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}dt=$ $-e^{-\lambda\cdot t}|_0^x=1-e^{-\lambda\cdot x}$.

$F(x)$ - это вероятность отказа элемента за время длительностью x.

Вероятность безотказной работы за время длительностью x – это вероятность противоположного события. Эта функция называется *функцией надежности*: $R(t)=1-P(X<x)=1-F(x)=e^{-\lambda\cdot x}$. Вероятность безотказной работы за *x=t=25* часов равна $R(25)=e^{-0{,}04\cdot 25}=e^{-1}\approx 0{,}358$.

Пример 7. Из группы населения случайным образом отобрано 10 человек и собраны их доходы за истекший год в тысячах рублей x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{10}$. Найти выборочное среднее исправленную выборочную дисперсию. Считая распределение доходов в группе нормальным и, применяя в качестве его параметров выборочные характеристики, определить, какой процент населения имеет годовой доход, превышающий 100 тыс. рублей.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
80	110	130	100	70	90	150	60	90	70

Решение.

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{X} = \frac{110 + 130 + 100 + 70 + 90 + 150 + 60 + 80 + 130}{10} = \frac{950}{10} = 95$$

Вычислим выборочную дисперсию $D_в$.

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - M_в)^2,\ n=10.$$

$$D_в = \frac{1}{10}[(80-95)^2 + (110-95)^2 + (130-95)^2 + (100-95)^2 + (70-95)^2$$

$$+(90-95)^2 + (150-95)^2 + (60-95)^2 + (90-95)^2 + (70-95)^2] =$$

$$= \frac{1}{10}[225 + 225 + 1225 + 25 + 625 + 25 + 3025 + 1225 + 25 + 625] = \frac{7250}{10}$$

$$= 725$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{10}{9}\cdot 725 = 805{,}56.$$

$$\sigma = \sqrt{S^2} = 28{,}4.$$

Чтобы найти процент группы населения, которая имеет доход, превышающий 100 тыс. руб. используем формулу попадания значений нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$ где Ф – функция Лапласа.

В данном случае принимаем следующие значения параметров:

$\alpha = 100$ тыс.руб., $a = \bar{x} = 95$ тыс.руб., $\sigma = \sqrt{S^2} = S = 28{,}4$тыс. руб., β ? 100 тыс. руб. (нет ограничений сверху). Имеем: $P(X > 100) = P(100 < X < \infty) =$

$$\Phi\left(\frac{\infty-95}{28{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{100-95}{28{,}4}\right) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{5}{28{,}4}\right) = 0{,}5 - \Phi(0{,}176)$$

По таблице находим: $\Phi(0{,}176) = 0{,}07$, следовательно, $P(X > 100) \approx 0{,}43$.

ПРОГРАММА
«Математические основы теории систем»
для студентов третьего курса заочной формы обучения

1. Понятие случайного события. Алгебраические операции над событиями. Множество элементарных событий.
2. Алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятности события. Вероятностное пространство.
3. Классическое определение вероятности события.
4. Статистическое определение вероятности события.
5. Геометрическое определение вероятности события.
6. Элементы комбинаторики. Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме.
7. Определение условной вероятности. Независимость событий.
8. Вероятности сложных событий. Формулы умножения вероятностей. Теоремы сложения вероятностей.
9. Формула полной вероятности, формулы Байеса.
10. Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
11. Предельные теоремы в схеме Бернулли: формулы Муавра-Лапласа и Пуассона.
12. Определение случайной величины. Дискретные случайные величины (ДСВ) и случайные величины непрерывного типа (СВНТ).
13. Закон распределения ДСВ.
14. Числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия и другие моменты. Свойства математического ожидания и дисперсии.
15. Примеры ДСВ.
16. Задание СВНТ функцией распределения и функцией плотности вероятностей. Свойства этих функций.
17. Числовые характеристики СВНТ.
18. Совместное распределение нескольких случайных величин. Функции случайных величин и их числовые характеристики.
19. Независимость случайных величин.
20. Примеры непрерывных распределений: равномерное, нормальное и показательное.
21. Характеристики надежности. Основные понятия теории надежности.
22. Надежность элемента, работающего до первого отказа.
23. Надежность восстанавливаемого элемента.
24. Надежность системы.
25. Ковариация, коэффициент корреляции.
26. Неравенство Чебышова. Закон больших чисел. Теорема Чебышова.
27. Понятие о предельных теоремах. Центральная предельная теорема для суммы одинаково распределенных слагаемых. Теорема Ляпунова.

28.Математическая статистика. Выборка и способы ее представления. Числовые характеристики выборочного распределения.
29.Статистическое оценивание характеристик распределения генеральной совокупности по выборке (точечные оценки и их свойства).
30.Интервальные оценки. Доверительный интервал, надежность и точность оценки.
31.Доверительный интервал для центра нормального распределения при известной дисперсии.
32.Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения нормального распределения.
33.Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона.
34.Проверка гипотез о надежности. Проверка гипотезы о показательности распределения времени безотказной работы.
35.Критерии проверки гипотез о значениях параметра показательного распределения.

Рекомендуемая литература
Основная

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1998.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 1999.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности.- М.: Наука, 1965.

Дополнительная

1. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2000.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей – М.: Высшая школа, 1998.
3. Учебные задания для типовых расчетов по теории вероятностей /ДГТУ. Ростов н/Д, 1996.
4. Рыжкин А.А., Слюсарь Б.Н., Шучев К.Г. Основы теории надежности. Учебное пособие. Ростов-на-Дону, 2002, 182 с.